# Lösung zur Diplomprüfung Frühjahr 2007

Prüfungsfach

# Statik

Klausur am 26.02.2007

Name: ______________ Vorname: ______________ Matrikelnummer: ______________
(bitte deutlich schreiben) (9stellig!)

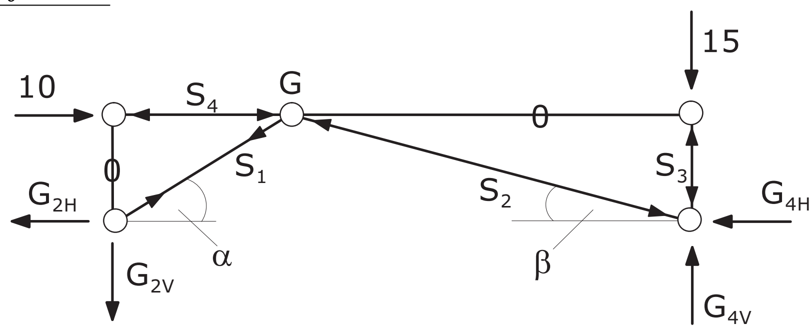
| Aufgabe | ~~1~~ | ~~2~~ | ~~3~~ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mögliche Punkte | ~~20~~ | ~~5~~ | ~~5~~ | 25 | 20 | 30 | 25 | 30 | 20 | 120 |
| erreichte Punkte | | | | | | | | | | |

## Wichtige Hinweise

- Dauer der Klausur: 3 Stunden, davon
  30 Minuten für Aufgaben ohne Hilfsmittel,
  2 Stunden 30 Minuten für Aufgaben mit Hilfsmitteln.
- Prüfen Sie, ob alle Aufgabenblätter vorhanden sind.
- Schreiben Sie auf das Deckblatt ihren Namen und ihre Matrikelnummer.
- Geben Sie bei den Aufgaben, die ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind, Ihre Lösungen auf den Aufgabenblättern an. Bei Bedarf können Sie weiteres farbiges Schreibpapier anfordern. Verwenden Sie hierfür kein eigenes Papier.
- Die Aufgabenblätter zu den Aufgaben, die mit Hilfsmitteln zu bearbeiten sind, sind zusammen mit den zugehörigen Lösungen abzugeben.
- Keine grünen Stifte verwenden.
- Die Lösungen sollen alle Nebenrechnungen und Zwischenergebnisse enthalten.
- Programmierbare Rechner nur ohne Programmteil benutzen.
- Die Benutzung Programmgesteuerter Rechner (z.B Notebooks, Laptops) ist nicht zulässig.
- Mobiltelefone sind während der Klausur abzuschalten und dürfen nicht benutzt werden.
- Toilettenbesuche sind nur einzeln unter Hinterlegung des Studentenausweises bei den Aufsichtspersonen gestattet.
- Keine Gleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten lösen.

# Musterlösung Aufgabe 4 ( 25 Punkte)

**a)** **Teilsystem:**




α = 33,69°

β = 15,94°

$$\sum M_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 10 \cdot 1 + 15 \cdot 5 = G_{4v} \cdot 5 \quad\Rightarrow\quad \underline{G_{4v} = 17\,kN}$$

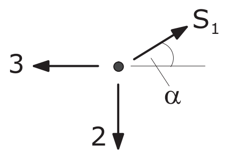
$$\sum V = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{G_{2v}} = 17 - 15 = \underline{2\,kN}$$

$$\sum M_G = 0 \quad\Rightarrow\quad G_{2H} \cdot 1 = G_{2v} \cdot 1,5 \quad\Rightarrow\quad \underline{G_{2H} = 3\,kN}$$

$$\sum M_G = 0 \quad\Rightarrow\quad G_{4v} \cdot 3,5 - G_{4H} \cdot 1 - 15 \cdot 3,5 = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{G_{4H} = 7\,kN}$$

Test: $\sum H = 0 \quad\Rightarrow\quad 10 - G_{2H} - G_{4H} = 10 - 3 - 7 = 0 \quad \surd$

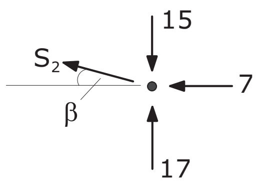
**Knoten 2:**




$S_1 \cdot \cos\alpha = 3 \quad\Rightarrow\quad \underline{S_1 = 3,6\,kN}$

$(S_1 \cdot \sin\alpha = 2)$

**Knoten 4:**

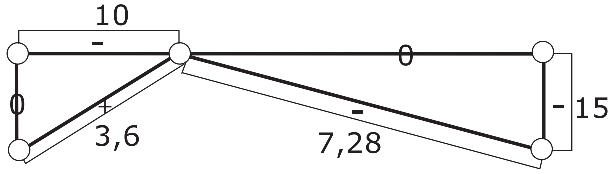



$S_2 \cdot \cos\beta = -7 \quad\Rightarrow\quad \underline{S_2 = -7,28\,kN}$

$(S_2 \cdot \sin\beta = 15 - 17)$

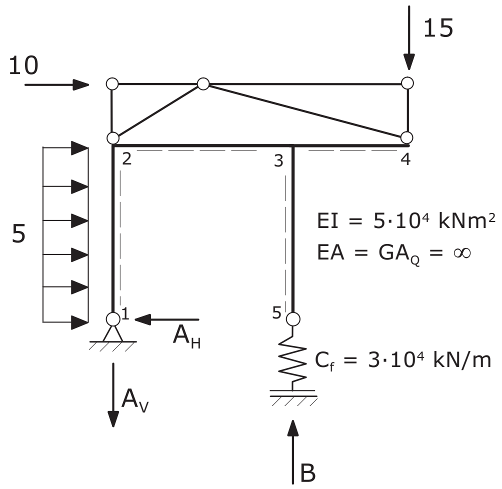
$S_3 = -15\,kN; \qquad S_4 = -10\,kN$

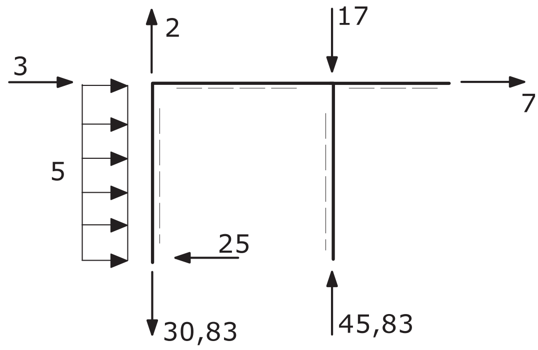
**Normalkraft [kN]**




Q, M → 0 !

**Auflager:**



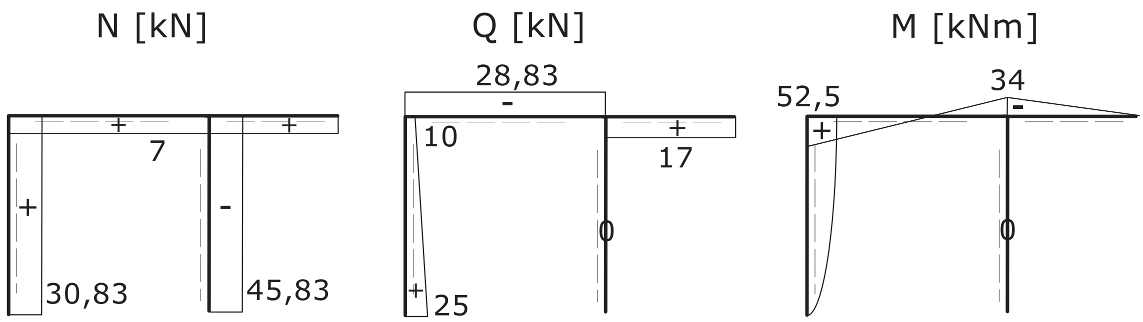




$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 5 = B \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{B = 45,83\,kN}$$

$$\sum V = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_v} = B - 15 = \underline{30,8\overline{3}\,kN}$$

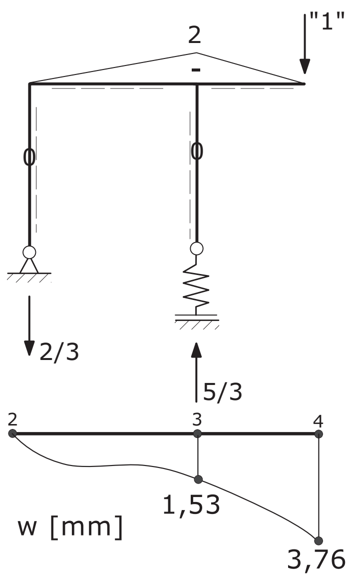
$$\sum H = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_H} = 5 \cdot 3 + 10 = \underline{25\,kN}$$

$$Test: \sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 3 \cdot 1,5 - A_v \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = 0 \quad \surd$$




**b)**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 5 = \overline{B} \cdot 3 \quad \Rightarrow \overline{B} = \tfrac{5}{3}$$




$$\delta_3 = \frac{B}{c_f} = \frac{45,83\,kN}{3 \cdot 10^4\,kN/m} = 1,53\,mm$$

$$EI\delta_4 = \tfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot 34 \cdot 2 + \tfrac{1}{6}(52,5 - 2 \cdot 34)(-2) \cdot 3$$

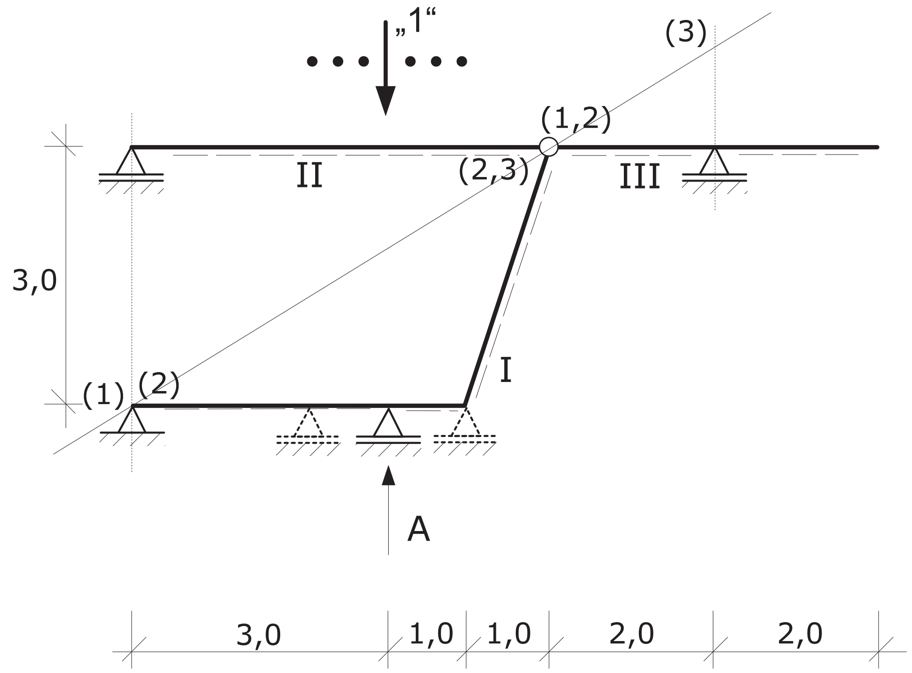
$$+ \frac{45,83 \cdot \frac{5}{3}}{c_f} \cdot EI$$

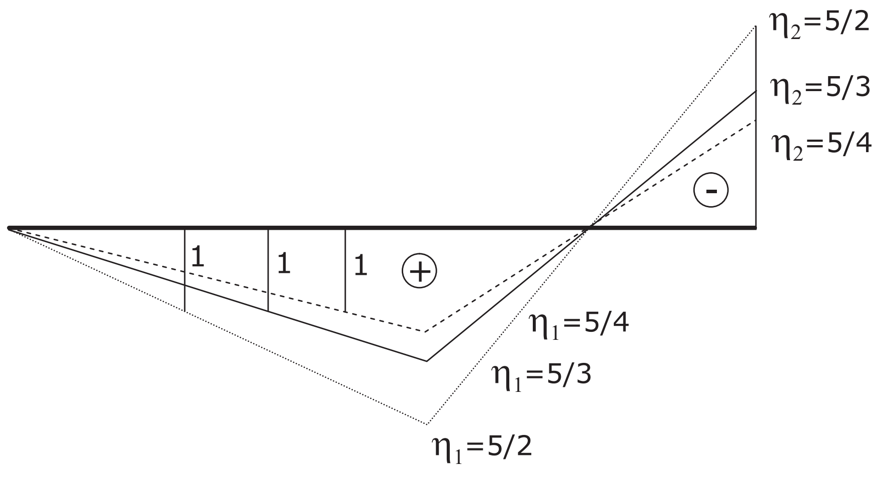
$$= 45,3 + 15,5 + 127,3 = 188,14\,kNm^3$$

$$\Rightarrow \delta_4 = \underline{3,76\,mm}$$

# Musterlösung Aufgabe 5 ( 20 Punkte)

**Einflusslinie:**




$$a)\quad A = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 2\cdot \frac{5}{3} - 10\cdot\frac{5}{3} = 8,3\,kN$$

$$b)\quad A = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 2\cdot \frac{5}{4} - 10\cdot\frac{5}{4} = 6,25\,kN \ \surd \ \rightarrow \text{nach rechts verschieben!}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 2\cdot \frac{5}{2} - 10\cdot\frac{5}{2} = 12,5\,kN$$

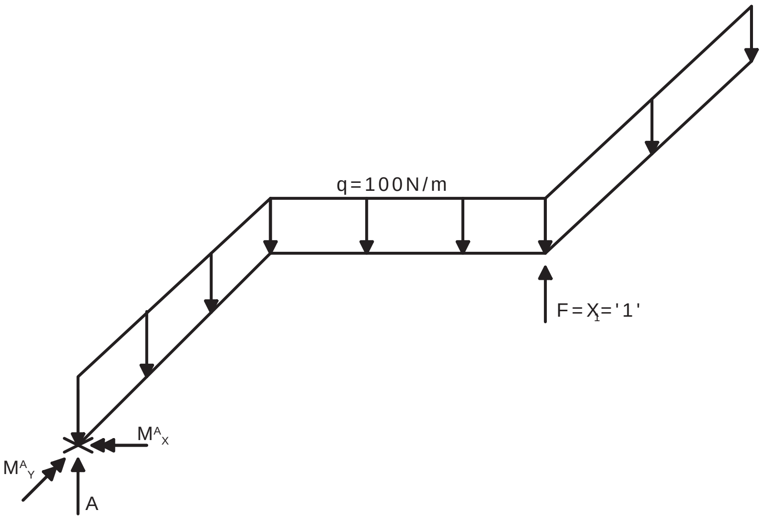
# Musterlösung Aufgabe 6 ( 30 Punkte)

## a) Belastung und Systemskizze

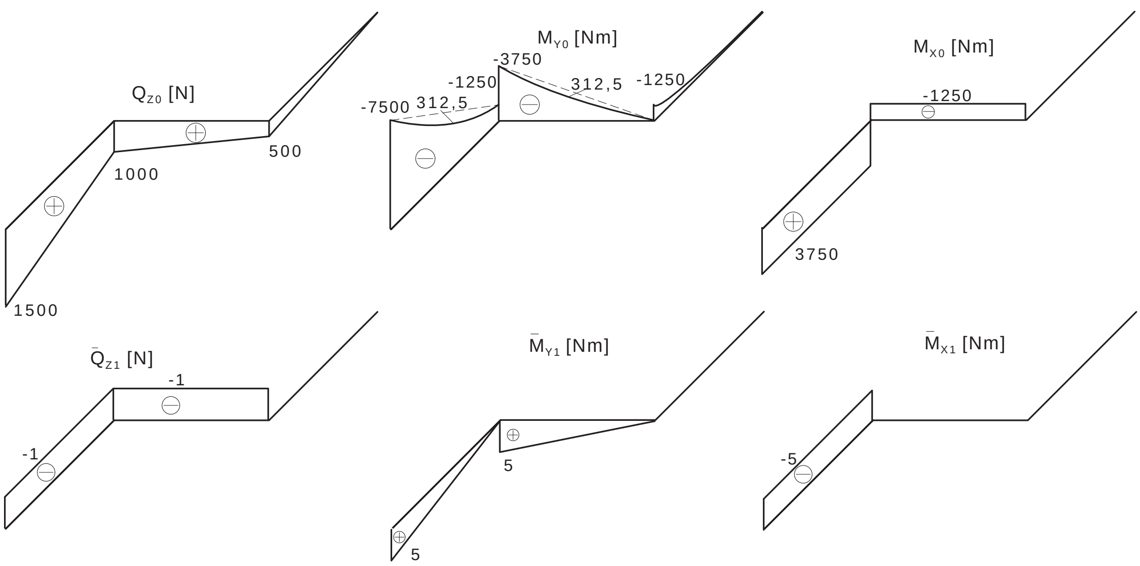
$$q \quad = \quad A \cdot \rho \cdot g \quad = \quad \frac{1}{4} \cdot 0,5095^2 \cdot 50 \cdot 9,81 \quad \approx \quad 100\frac{N}{m}$$

$$\begin{array}{lclllcr} A_0 & = & 1500N & & \overline{A}_1 & = & -1N \\ M^A_{X0} & = & -7500N & & \overline{M}^A_{X1} & = & 5N \\ M^A_{Y0} & = & -3750N & & \overline{M}^A_{Y1} & = & 5N \end{array}$$

1-fach statisch unbestimmt




## b) Kraftgrößenverfahren



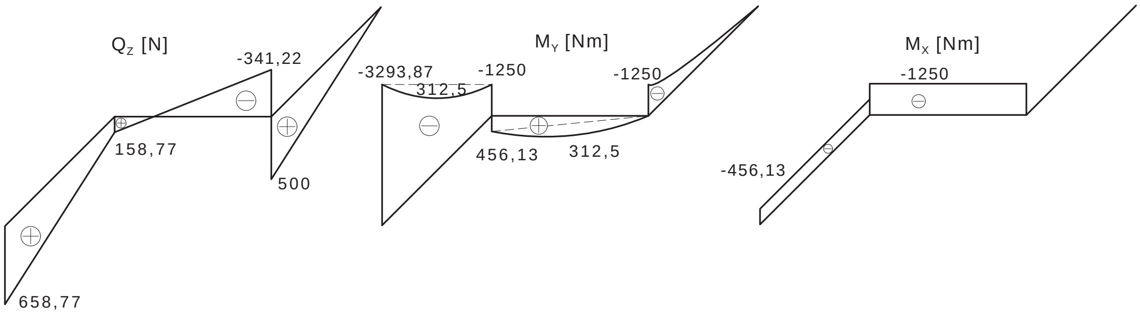
$$
\begin{aligned}
EI\delta_{10} &= \tfrac{1}{6} \cdot 5 \cdot [2 \cdot (-7500) - 1250] \cdot 5 + \tfrac{1}{3} \cdot 312.5 \cdot 5 \cdot 5 \\
&\quad + \tfrac{1}{3} \cdot (-3750) \cdot 5 \cdot 5 + \tfrac{1}{3} \cdot 312.5 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3750 \cdot (-5) \cdot 5 \\
&= -281250 \\
EI\delta_{11} &= \tfrac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 5 + \tfrac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 5 + 2 \cdot (-5)^2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \\
&= 334,33
\end{aligned}
$$

Verträglichkeitsbedingung:

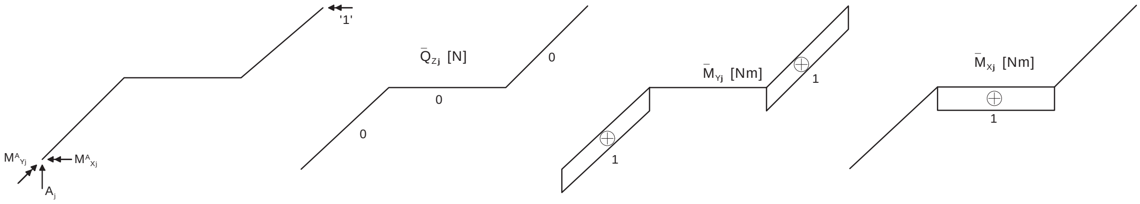
$$
\begin{aligned}
\delta_{11} X_1 + \delta 10 &= 0 \\
\Leftrightarrow X_1 &= \tfrac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \tfrac{-EI\delta_{10}}{EI\delta_{11}} = \tfrac{281250}{334{,}33} = 841,23N
\end{aligned}
$$

Schnittgrößen:

$$
\begin{aligned}
A &= A_0 + \overline{A}_1 X_1 &= 658,77 \quad & N \\
F &= F_0 + \overline{F}_1 X_1 &= 841,23 \quad & N \\
M_X^A &= M_{X0}^A + \overline{M}_{X1}^A &= 3293,87 \quad & Nm \\
M_Y^A &= M_{Y0}^A + \overline{M}_{Y1}^A &= 456,13 \quad & Nm
\end{aligned}
$$



## c) Verdrehung




$$\begin{aligned}
\overline{A}_{\varphi} &= 0 \quad N \\
\overline{M}^{A}_{X\varphi} &= 1 \quad Nm \\
\overline{A}^{A}_{Y\varphi} &= 0 \quad Nm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \tfrac{1}{EI} \cdot [2 \cdot 1 \cdot (-1250) \cdot 5 + \tfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-1250) \cdot 5 + \tfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 312,5 \cdot 5 \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-3293,87 - 1250) \cdot 5] \\
&= \tfrac{1}{EI}(-25422,18)[rad]
\end{aligned}$$

# Musterlösung Aufgabe 7 ( 25 Punkte)

## a) Momentenverlauf mit Drehwinkelverfahren

1) Festhaltekraftgrößen

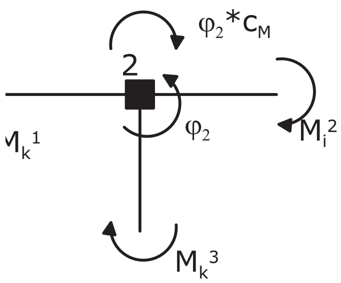
$$
\begin{array}{llcccr}
\text{Stab 1:} & M_i^{10} & = & \frac{Pl}{8} & = & 2,5 \\
 & M_k^{10} & = & \frac{-Pl}{8} & = & -2,5 \\
\text{Stab 2:} & M_i^{20} & = & \frac{ql^2}{12} & = & 1,67 \\
 & M_k^{20} & = & \frac{-ql^2}{12} & = & -1,67 \\
\text{Stab 5:} & \rightarrow & \multicolumn{4}{l}{\text{wird als angehängt betrachtet}}
\end{array}
$$

2) Steifigkeiten

$$
\begin{array}{lcccc}
k_{ik}^1 & = & \frac{2EI}{l} & = & 2000 \\
k_{ik}^2 & = & \frac{2EI}{l} & = & 2000 \\
k_{ik}^3 & = & \frac{2EI}{l} & = & 2000 \\
k_{ik}^4 & = & \frac{3EI}{2l} & = & 1200
\end{array}
$$

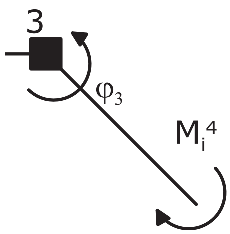
3) Gleichgewicht

Knoten 2: $\Sigma M_2 = 0$




$$
\begin{array}{lcl}
\rightarrow M_k^1 + M_i^2 + M_k^3 + M_\varphi & = & 0 \\
\Leftrightarrow M_k^{10} + k_{ik}^1 \cdot 2\varphi_2 + M_i^{20} + k_{ik}^2 \cdot (2\varphi_2 + \varphi_3) + k_{ik}^3 \cdot (2\varphi_2) + c_M\varphi_2 & = & 0 \\
\Leftrightarrow -0,83 + [12200]\varphi_2 + [2000]\varphi_3 & = & 0
\end{array}
$$

Knoten 3: $\Sigma M_3 = 0$



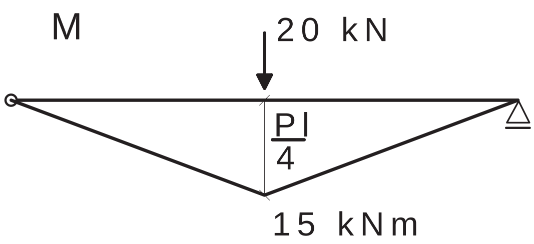

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow M_k^2 + M_i^4 &&= 0\\
&\Leftrightarrow M_k^{20} + k_{ik}^2 \cdot [2\varphi_3 + \varphi 2] + k_{ik}^4 \cdot 2\varphi_3 &&= 0\\
&\Leftrightarrow -1,67 + [2000]\varphi_2 + [6400]\varphi_3 &&= 0
\end{aligned}
$$

4) Gleichungssystem

$$
\begin{bmatrix} 12200 & 2000 \\ 2000 & 6400 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83 \\ 1,67 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,662 \cdot 10^{-5} \\ 2,526 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}
$$

5) Nachlaufrechnung für M

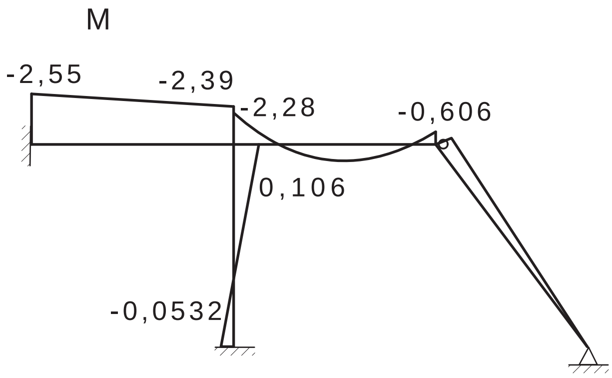
Einzelsystem:



Restsystem:

$$
\begin{array}{rclcrcr}
M_i^1 &=& 2,5 + 2000 \cdot \varphi_2 &=& 2,55 &\rightarrow& -2,55 \\
M_k^1 &=& -2,5 + 2000 \cdot 2 \cdot \varphi_2 &=& -2,39 && \\
M_i^2 &=& 1,67 + 2000 \cdot (2 \cdot \varphi_2 + \varphi_3) &=& 2,28 &\rightarrow& -2,28 \\
M_k^2 &=& -1,67 + 2000 \cdot (\varphi_2 + 2 \cdot \varphi_3) &=& -0,606 && \\
M_i^3 &=& 2000 \cdot \varphi_2 &=& 0,0532 &\rightarrow& -0,0532 \\
M_k^3 &=& 2 \cdot 2000 \cdot \varphi_2 &=& 0,106 && \\
M_i^4 &=& 2 \cdot 1200 \cdot \varphi_3 &=& 0,606 &\rightarrow& -0,606
\end{array}
$$

Grafik:

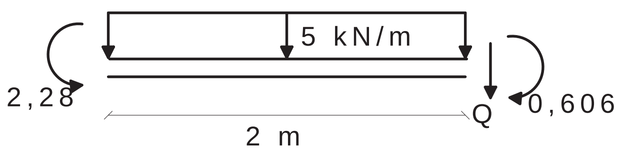



## b) Moment in der Drehfeder

$$M_\varphi = c_M \cdot \varphi_2 = 0,00532 \quad kNm$$

## c) Querkraft am rechten Ende des Stabes 2

$$Q = \frac{-0,606+2,28-5\cdot2\cdot1}{2,0} = -4,162 \quad kN$$




## d) Drehwinkel bei Erhöhung der Drehfedersteifigkeit und Biegesteifigkeit

$$
\begin{array}{rcrl}
c_M &=& 400 & kNm/[rad] \\
EI_1 &=& 3000 & kNm^2
\end{array}
$$

$\rightarrow$ modifizierte Steifigkeitsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} 14400 & 2000 \\ 2000 & 6400 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83 \\ 1,67 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,237 \cdot 10^{-5} \\ 2,539 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

# Musterlösung Aufgabe 8 ( 30 Punkte)

a) Geometrische Randbedingungen müssen, statische Randbedingungen sollten erfüllt sein.

b) Randbedingungen des dargestellten Systems

$$\begin{array}{ll} \text{Rand } 1-3: & w = 0, \quad m_{yy} = 0, \quad w_{,y} \neq 0 \\ \text{Rand } 2-4: & q_x^* = 0, \quad m_{xx} = 0, \quad w \neq 0 \quad \text{für } 0 < y < 3 \end{array}$$

c) Vernachlässigung von Randstörung
→ unendlicher Plattenstreifen
→ keine Krümmung in x-Richtung

d) Ermittlung der Konstanten $C_1$

$$\begin{aligned} w(x,y) &= C_1 \left( \frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{2} + \frac{9}{4} y \right) \\ w(x,y)_{,y} &= C_1 \left( \frac{y^3}{3} - \frac{3}{2} y^2 + \frac{9}{4} \right) \\ w(x,y)_{,yy} &= C_1 \left( y^2 - 3y \right) \\ w(x,y)_{,x} &= w(x,y)_{,xx} = w(x,y)_{,xy} = w(x,y)_{,yx} = 0 \\ w(x,0) &= w(x,3) = 0 \qquad \rightarrow \text{geom. Randbedingung erfüllt} \end{aligned}$$

mittels Ritz-Verfahren $\quad \bar{w}_i - \bar{w}_e = 0$

$$\begin{aligned} \bar{w}_i &= \int_\Omega m_{xx}\bar{\kappa}_{xx} + m_{yy}\bar{\kappa}_{yy} + 2m_{xy}\bar{\kappa}_{xy} \, dA \\ &= k \int_\Omega w_{yy} \bar{w}_{yy} \, dA \\ &= k \int_0^5 \int_0^3 C_1 \bar{C}_1 \left( y^4 - 6y^3 + 9y^2 \right) \, dy \, dx \\ &= k \quad C_1 \bar{C}_1 \, 40,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_e &= \int_\Omega q \, \bar{w} \, dA \\ &= \int_0^5 \int_0^3 q \, \bar{C}_1 \left( \frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{2} + \frac{9}{4} y \right) \, dy \, dx \\ &= q \, \bar{C}_1 \frac{81}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_i - \bar{w}_e &= k \, C_1 \bar{C}_1 \, 40,5 - q \, \bar{C}_1 \frac{81}{4} = 0 \\ &\Rightarrow \quad C_1 = \frac{q}{2k} \qquad \text{mit} \quad k = \frac{E \, t^3}{12(1-\nu^2)} = 2604.17 \\ &\Rightarrow \quad C_1 = -0,0048 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad w(x,y) = -0,0048\left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{2} + \frac{9}{4}y\right)$$

e) Maximalwerte in Plattenmitte

$$w_{max} = -0,0048\left(\frac{1,5^4}{12} - \frac{1,5^3}{2} + 1,5\frac{9}{4}\right) = -0,0101\ m$$

$$m_{xx} = -k\,(w_{,xx} + \nu\ w_{,yy}) = -k\ \nu\ w_{,yy} \qquad \Rightarrow m(x,\ 1,5)_{xx} = -5,625\ \frac{kNm}{m}$$

$$m_{yy} = -k\,(\nu\ w_{,xx} + w_{,yy}) = -k\ w_{,yy} \qquad \Rightarrow m(x,\ 1,5)_{yy} = -28,125\ \frac{kNm}{m}$$

$$m_{xy} = -k\,(w_{,xy} + w_{,yx})\,\frac{1-\nu}{2} = 0$$

f) Für $\nu = 0$ folgt fÃ$\frac{1}{4}$r die Momente:

$m_{xy} = m_{xx} = 0 \qquad m_{yy}$ bleibt unverändert

für die Durchbiegung ergibt sich:

$$C_{1,\,\nu=0} = -0,005 \qquad \rightarrow \qquad w_{\nu=0} = -0,01055\ m$$

g) Balkenlösung

$$max\ M = \frac{q\ l^2}{8} = 28,125\ \frac{kNm}{m}$$ identisch zu e) und

$$max\ w = \frac{5\ p\ l^4}{384\ E\ I} = \frac{5 \times 25 \times 3^4 \times 10^5}{384 \times 3 \times 10^7 \times \underbrace{8,\bar{3}}_{I=\frac{b\ t^3}{12}=\frac{1\times 0,1^3}{12}}} = 0,01055\ m$$ identisch zu f)

h) Die Anteile heben sich gegenseitig auf, da keine Abhängigkeit von x vorhanden ist.
⇒ Der Ansatz ist ungeeignet für antimetrische Belastung.

# Musterlösung Aufgabe 9 ( 20 Punkte)

allgemeine Lösung $\mu = \sqrt{\frac{P}{E\,I}}$

$$
\begin{array}{lcl}
w(x) & = & a_0 + a_1\,x + a_2\,sin\,(\mu x) + a_3\,cos\,(\mu x) \\
w'(x) & = & a_1 + a_2\,\mu\,cos\,(\mu x) - a_3\,\mu\,sin\,(\mu x) \\
w''(x) & = & - a_2\,\mu^2\,sin\,(\mu x) - a_3\,\mu^2\,cos\,(\mu x) \\
w'''(x) & = & - a_2\,\mu^3\,cos(\mu x) + a_3\,\mu^3 sin\,(\mu x)
\end{array}
$$

a) Randbedingungen

$$w\,(0) = 0 \qquad (1)$$

$$w'(0) = 0 \qquad (2)$$

$$
\begin{array}{rcl}
V(l) = 0 \Rightarrow V(l) & = & M'(l) + H\,w'(l) \\
& = & -E\,I\,w'''(l) - P\,w'(l) = 0 \\
\Rightarrow & & w'''(l) + \underbrace{\frac{P}{E\,I}}_{\mu^2} w'(l) = 0
\end{array}
\qquad (3)
$$

$$
\begin{array}{rl}
M(l) = -P\,e \Rightarrow & -E\,I\,w''(l) = -P\,e \\
\Rightarrow & w''(l) = \underbrace{\frac{P}{E\,I}}_{\mu^2} e \\
\Rightarrow & -a_2\,sin\,(\mu l) - a_3\,cos\,(\mu l) = e
\end{array}
\qquad (4)
$$

b) Berechnung der Koeffizienten

aus (1) $a_0 = -a_3$

aus (2) $a_1 = -a_2\,\mu$

aus (3) $-a_2\,\mu^3\,cos(\mu l) + a_3\,\mu^3\,sin(\mu l) + a_1\,\mu^2 + a_2\,\mu^3\,cos(\mu l) - a_3\,\mu^3\,sin(\mu l) = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0$

$\Rightarrow_{in\ (2)}\ a_2 = 0$

aus (4) $a_3 = -\frac{e}{cos(\mu l)}$

$$w(x) = \frac{e}{cos(\mu l)}\left[1 - cos(\mu x)\right], \qquad \text{mit } \mu = \sqrt{\frac{P}{E\,I}}$$

c) Berechnung der Verschiebung

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{E\,I}} \qquad w(l) = e\,\left[\frac{1}{cos(\mu l)} - 1\right]$$

$$
\begin{array}{llllll}
P = 0 & \rightarrow & \mu = 0 & \rightarrow & w(l) = 0 \\
P = 10 & \rightarrow & \mu = 0,1 & \rightarrow & w(l) = 0,5 \left[\frac{1}{cos\ 1} - 1\right] = 0,425\ m \\
P = 20 & \rightarrow & \mu = 0,141 & \rightarrow & w(l) = 2,7\ m \\
P = 24,5 & \rightarrow & \mu = 0,157 & \rightarrow & w(l) = 89,61\ m
\end{array}
$$